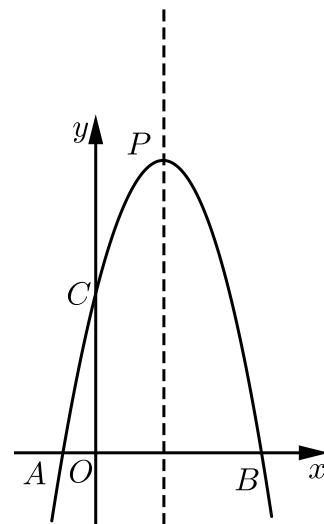


第2讲二次函数与四边形存在性（加油站）

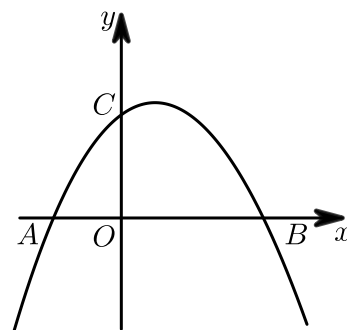
一、 平行四边形

1. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $P(2, 9)$ ，与 x 轴交于点 A, B ，与 y 轴交于点 $C(0, 5)$ 。



- (1) 求二次函数的解析式及点 A, B 的坐标。
- (2) 设点 Q 在第一象限的抛物线上，若其关于原点的对称点 Q' 也在抛物线上，求点 Q 的坐标。
- (3) 若点 M 在抛物线上，点 N 在抛物线的对称轴上，使得以 A, C, M, N 为顶点的四边形是平行四边形，且 AC 为其一边，求点 M, N 的坐标。

2. 如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$ 与 x 轴相交于 A, B 两点，（点 A 在 B 点左侧）与 y 轴交于点 C



- (1) 求 A, B 两点坐标 .
- (2) 连接 AC ，若点 P 在第一象限的抛物线上， P 的横坐标为 t ，四边形 $ABPC$ 的面积为 S . 试用含 t 的式子表示 S ，并求 t 为何值时， S 最大 .
- (3) 在 (2) 的基础上，若点 G, H 分别为抛物线及其对称轴上的点，点 G 的横坐标为 m ，点 H 的纵坐标为 n ，且使得以 A, G, H, P 四点构成的四边形为平行四边形，求满足条件的 m, n 的值 .

3. 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (b, c 为常数) 与 y 轴相交于点 C , 经过点 C 作直线 $CD \parallel x$ 轴, 交抛物线于点 D , 将直线 CD 向上平移 t 个单位长度, 交抛物线于点 A 和 B (A 在 B 的左侧), 直线 AB 与抛物线的对称轴 l 交于点 E .

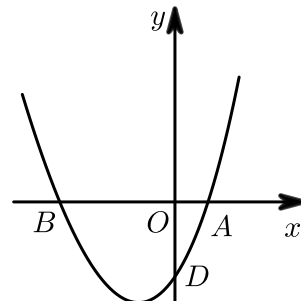
(1) 当 $b = -2, c = 1$ 时, 求抛物线顶点 P 的坐标.

(2) 若 $\angle ACB = 90^\circ$, 求 t 的值.

(3) 在 (2) 的条件下, 当以点 A, D, C, E 为顶点的四边形为平行四边形时, 求 b 的值.

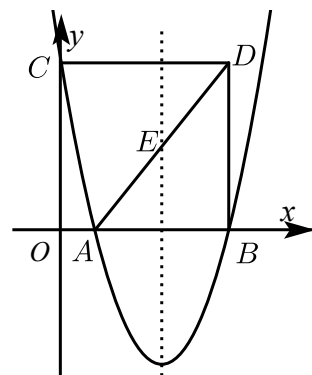
二、矩形

4. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(2, 0)$ 、 $B(-4, 0)$ ，与 y 轴于点 D 。



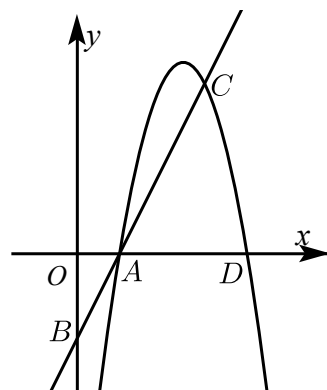
- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 连接 BD ，点 P 在抛物线的对称轴上，以 Q 为平面内一点，以点 P 、 B 、 D 、 Q 为顶点的四边形能否成为矩形？若能，请求出点 P 的坐标；若不能，请说明理由。

5. 如图，在平面直角坐标系中，点 O 是原点，正方形 $OBDC$ 的顶点 B 在 x 轴的正半轴上，顶点 C 在 y 的正半轴上，点 D 的坐标是 $(5, 5)$ ，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 B 、 C 两点与 x 轴的另一个交点是点 A ，连接 AD 。

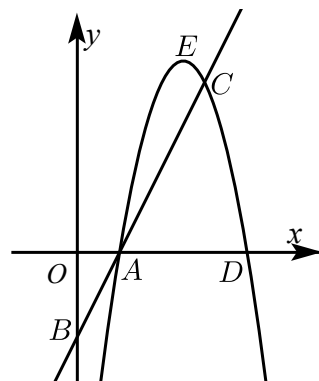


- (1) 请直接写出抛物线的表达式。
- (2) 设抛物线的对称轴与直线 AD 相交于点 E ，求出点 E 的坐标。
- (3) 若点 M 是抛物线对称轴上一点，点 N 是平面内一点，是否存在以 A 、 D 、 M 、 N 为顶点的矩形，若存在，请直接写出 M 点的坐标；若不存在，请说明理由。

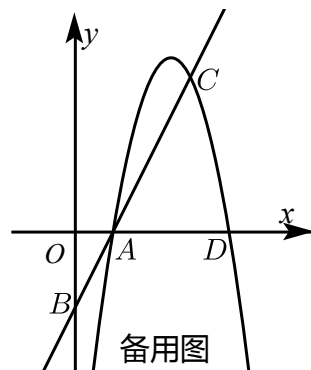
6. 如图，已知直线 $l: y = 2x - 2$ 分别与 x 轴、 y 轴交于点 A 、 B 两点， C 为 l 在第一象限内的一点，且 $AC = 2\sqrt{5}$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 过 A 、 C 两点，且与 x 轴的另一交点为 D 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 如图若抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 的顶点为 E ， P 为直线 AC 上的一动点，当 $|PD - PE|$ 值最大时，求此时点 P 的坐标及 $|PD - PE|$ 的最大值。

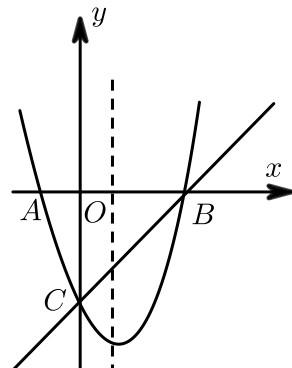


- (3) 如图，若点 M 为 x 轴上一点，点 N 为平面内一点，且满足以点 B 、 C 、 M 、 N 为顶点的四边形是矩形，请直接写出点 N 的坐标。



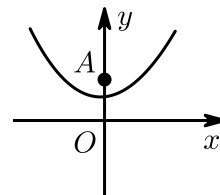
三、菱形

7. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B ，与 y 轴交于点 C ，作直线 BC ，点 B 的坐标为 $(6, 0)$ ，点 C 的坐标为 $(0, -6)$ 。



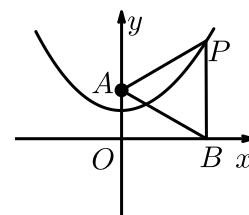
- (1) 求抛物线的解析式并写出其对称轴。
- (2) D 为抛物线对称轴上一点，当 $\triangle BCD$ 是以 BC 为直角边的直角三角形时，求 D 点坐标。
- (3) 若 E 为 y 轴上且位于点 C 下方的一点， P 为直线 BC 上的一点，在第四象限的抛物线上是否存在一点 Q ，使以 C 、 E 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形，若存在，请求出 Q 点的横坐标；若不存在，请说明理由。

8. 已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ (如图所示) .



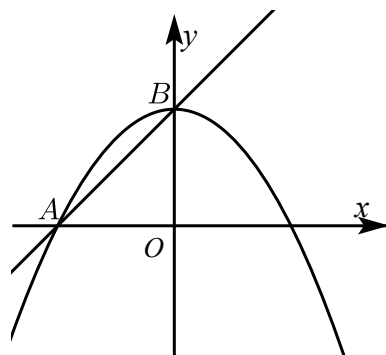
(1) 填空：抛物线的顶点坐标是 (_____ , _____) , 对称轴是 _____ .

(2) 已知 y 轴上一点 $A(0, 2)$, 点 P 在抛物线上 , 过点 P 作 $PB \perp x$ 轴 , 垂足为 B . 若 $\triangle PAB$ 是等边三角形 , 求点 P 的坐标 .



(3) 在 (2) 的条件下 , 点 M 在直线 AP 上 . 在平面内是否存在点 N , 使四边形 $OAMN$ 为菱形 ? 若存在 , 直接写出所有满足条件的点 N 的坐标 ; 若不存在 , 请说明理由 .

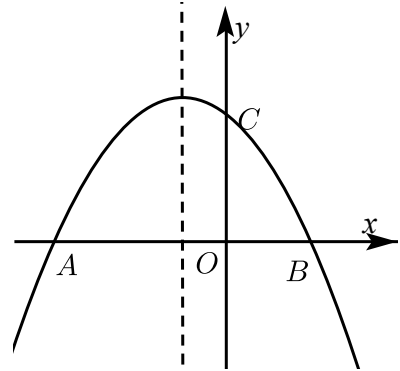
9. 如图，在平面直角坐标系中，直线 AB 和抛物线交于点 $A(-4, 0)$ ， $B(0, 4)$ ，且点 B 是抛物线的顶点．



- (1) 求直线 AB 和抛物线的解析式．
- (2) 点 P 是直线上方抛物线上的一点，求当 $\triangle PAB$ 面积最大时点 P 的坐标．
- (3) M 是直线 AB 上一动点，在平面直角坐标系内是否存在点 N ，使以 O 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由．

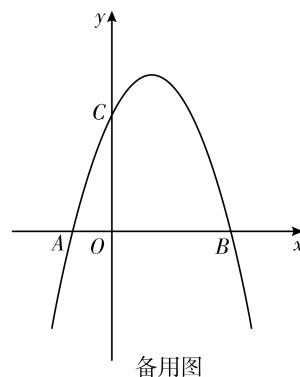
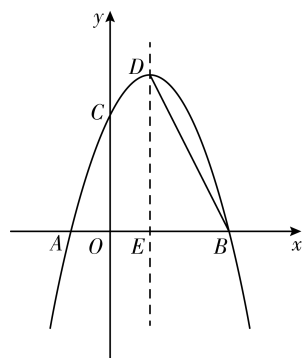
四、正方形

10. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + 2ax + c$ 交 x 轴于 A, B 两点，交 y 轴于点 $C(0, 3)$ ， $\tan \angle OAC = \frac{3}{4}$ 。



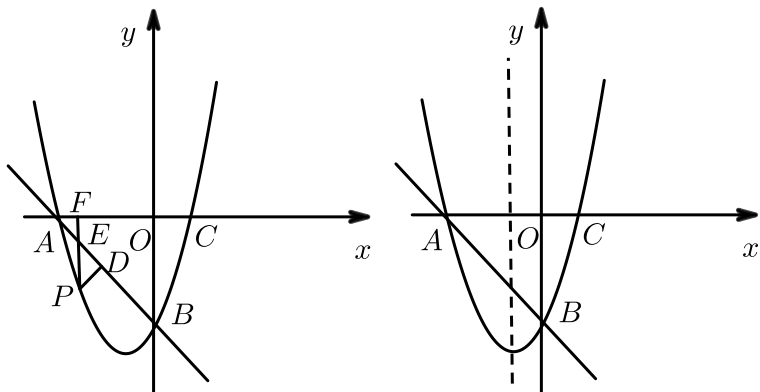
- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 点 M 是抛物线上任意一点，连接 CM ，以 CM 为边作正方形 $CMEF$ ，是否存在点 M 使点 E 恰好落在对称轴上？若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。

11. 如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B ，与 y 轴交于点 C ，点 B 坐标为 $(6, 0)$ ，点 C 坐标为 $(0, 6)$ ，点 D 是抛物线的顶点，过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 E ，连接 BD 。



- (1) 求抛物线的解析式及点 D 的坐标.
- (2) 点 F 是抛物线上的动点，当 $\angle FBA = \angle BDE$ 时，求点 F 的坐标.
- (3) 若点 P 是 x 轴上方抛物线上的动点，以 PB 为边作正方形 $PBFG$ ，随着点 P 的运动，正方形的大小、位置也随着改变，当顶点 F 或 G 恰好落在 y 轴上时，请直接写出点 P 的横坐标。

12. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A ， $C(1, 0)$ ，与 y 轴交于点 $B(0, -3)$ ，点 P 是直线 AB 下方的抛物线上一动点，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 F ，交直线 AB 于点 E ，作 $PD \perp AB$ 于点 D 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 当 $\triangle PDE$ 面积最大时，求出点 P 的坐标。
- (3) 连接 AP ，以 AP 为边在其右侧作正方形 $APMN$ ，随着点 P 的运动，正方形的大小、位置也随之改变。则当顶点 M 或 N 恰好落在抛物线的对称轴上时，求出点 P 的坐标。